Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 29, 1978, S.115-119

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung

Von Hans Robert Müller

Angenommen in der Klassensitzung vom 10.3.78

Die Berechnung polarer Trägheitsmomente für die Bahnkurven geschlossener Zwanglaufbewegungen in der Ebene verläuft in ähnlicher Weise wie die Berechnung der Inhalte der umrandeten Bahnflächen [1]. Fragestellungen können übertragen werden und führen zu analog gebauten Formeln, Ungleichungen und zu Beziehungen zwischen Flächeninhalten und polaren Trägheitsmomenten.

Die Gangebene $\underline{E}$ vollführe einen geschlossenen Bewegungsvorgang $\underline{B}$ gegenüber der Rastebene $\underline{E}'$. Beide Ebenen mögen als komplexe Zahlenebenen aufgefaßt werden, die Achsenkreuze in ihnen seien beliebig gewählt. Ein Punkt $X \in \underline{E}$ werde durch $x = x_1 + i\,x_2$, der sich mit X im Augenblick deckende Punkt $X' \in \underline{E}'$ durch $x' = x_1' + i\,x_2'$ erfaßt. Wir beschreiben $\underline{B}$ durch

$$x' = u' + x\,e^{i\varphi} \tag{1}$$

mit einer komplexen Funktion $u' = u'(t)$ und einer reellen Funktion $\varphi = \varphi(t)$ des reellen Parameters t (Zeit). $\underline{B}$ besitze die Periode T und die Drehzahl ν, d.h. T sei die kleinste positive Zahl, sodaß

$$u'(t+T) = u'(t), \tag{2}$$
$$\varphi\,(t+T) = \varphi\,(t) + 2\pi\nu. \tag{3}$$

Hierbei sei ν ganzzahlig und gelte $d\varphi/dt \neq 0$, $t \in [0,T]$. Läßt man Änderungen des Durchlaufungssinnes von $\underline{B}$ zu, so kann $\nu \geq 0$ angenommen werden. Die Funktion $\varphi(t)$ hat die Gestalt (vgl. [1])

$$\varphi(t) = \omega(t) + \frac{2\pi\nu}{T}\,t$$

mit einer periodischen Funktion $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \omega(t+T).$$

Ferner setzen wir

$$u' = -u\,e^{i\varphi} \tag{4}$$

und finden dann für die Pole die Darstellungen in $\underline{E}$ bzw. $\underline{E}'$

$$p = u - i\,\frac{du}{d\varphi},\ p' = u' + i\,\frac{du'}{d\varphi}.$$

Wir betrachten erst den Fall $\nu > 0$.

Der *Steinerpunkt* S von $\underline{E}$ ist der Schwerpunkt der Gangpolbahn bei der Belegung mit den Massenelementen $d\varphi$. Er wird in $\underline{E}$ durch

$$s = \frac{\oint p\, d\varphi}{\oint d\varphi} \tag{5}$$

beschrieben, wobei gilt

$$\oint p\, d\varphi = \oint u\, d\varphi, \quad \oint d\varphi = 2\pi\nu. \tag{6}$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, das **polare Trägheitsmoment** T_x **der im** *Steiner***schen Sinn mit den Massenelementen** $d\varphi$ **belegten Bahnkurve eines in** $\underline{E}$ **festgehaltenen Punktes X bezüglich des in** $\underline{E}'$ **gewählten Ursprungs** $0'$ $(x' = 0)$ **zu berechnen.** Hierzu setzen wir erst in

$$x'\,\bar{x}' = x_1'^2 + x_2'^2$$

die Ausdrücke aus (1) und (4) ein, erhalten

$$x'\,\bar{x}' = x\,\bar{x} - x\,\bar{u} - \bar{x}\,u + u'\,\bar{u}'$$

und damit für $x = \text{konst.}$

$$T_X = \oint x'\,\bar{x}'\, d\varphi = 2\pi\nu\,(x\,\bar{x} - x\,\bar{s} - \bar{x}\,s) + T_0, \tag{7}$$

wobei

$$T_0 = \oint u'\,\bar{u}'\, d\varphi$$

das Trägheitsmoment der Bahnkurve des Ursprungs 0 von $\underline{E}$ bedeutet.

Aus (7) folgern wir:

> **Alle Punkte von** $\underline{E}$ **auf Kreisen um den** *Steiner***punkt S führen zu Bahnkurven in** $\underline{E}'$**, die jeweils gleiches polares Trägheitsmoment bezüglich eines beliebigen Punktes von** $\underline{E}'$ **aufweisen.**

(7) hat nahezu die gleiche Gestalt, wie die auf *J. Steiner* zurückgehende Formel für den Inhalt F_X der von der Bahnkurve des Punktes X in $\underline{E}'$ berandeten Fläche: [2]

$$F_X = \pi\nu\,(x\,\bar{x} - x\,\bar{s} - \bar{x}\,s) + F_0. \tag{8}$$

Daraus folgt sofort die Beziehung

$$T_X = 2\,(F_X - F_0) + T_0. \tag{9}$$

Durch den Ansatz

$$z = \lambda x + \mu y, \ \lambda + \mu = 1$$

mit reellen Parametern λ, μ werden die Punkte Z der Geraden XY dargestellt. Wegen (1) gilt auch

$$z' = \lambda x' + \mu y'.$$

Die Berechnung des Trägheitsmomentes T_Z der Bahn des Punktes Z führt zu

$$T_Z = \oint z'\,\bar{z}'\, d\varphi = \lambda^2\, T_X + 2\lambda\mu\, T_{XY} + \mu^2\, T_Y, \tag{10}$$

wobei

$$T_{XY} = T_{YX} = \frac{1}{2} \oint (x' \bar{y}' + \bar{x}' y')\, d\varphi = \tag{11}$$
$$= \pi \nu \left[(x\bar{y} + \bar{x} y) - (x+y)\bar{s} - (\bar{x}+\bar{y})s\right] + T_0$$

als *gemischtes polares Trägheitsmoment* der Bahnkurven der Punkte X und Y erklärt werde.

Es ist in gleicher Weise eine Art von Polarform der Formel (7) für T_X, wie der gemischte Bahninhalt

$$F_{XY} = \frac{\pi\nu}{2} \left[(x\bar{y} + \bar{x} y) - (x+y)\bar{s} - (\bar{x}+\bar{y})s\right] + F_0$$

hinsichtlich der *Steiner*formel (8).

Wir erkennen sofort die Beziehung

$$T_{XY} = 2\,(F_{XY} - F_0) + T_0. \tag{12}$$

Der Bezug auf den *Steiner*punkt $S = 0$ bringt die Vereinfachungen

$$T_X = 2\pi\nu\, x\bar{x} + T_S, \quad T_{XY} = \pi\nu\,(x\bar{y} + \bar{x} y) + T_S. \tag{13}$$

In genau der gleichen Weise, wie für die Bahninhalte (vgl. [1]), ergeben sich für $\nu > 0$, $X \neq S$, $X \neq Y$ die drei Ungleichungen:

(a) $T_X > T_S$,
also die Minimaleigenschaft des Trägheitsmomentes für die Bahn des *Steiner*punktes S.
(b) $T_X - 2\,T_{XY} + T_Y > 0$,

denn es gilt ja

$$T_X - 2\,T_{XY} + T_Y = 2\pi\nu\,(x-y)\,(\bar{x}-\bar{y}) = 2\pi\nu\, d^2,$$

wobei d der Abstand der beiden Punkte X,Y ist: $d = \overline{XY}$.

Damit gelangen wir zu einer Darstellung des gemischten polaren Trägheitsmomentes

$$T_{XY} = \frac{1}{2}\,(T_X + T_Y) - \pi\nu d^2. \tag{14}$$

Wegen (9), (12) können wir auch schreiben

$$T_{XY} = T_0 + F_X + F_Y - 2\,F_0 - \pi\nu d^2. \tag{15}$$

Auf Grund der *Schwarz*schen Ungleichung finden wir noch für $T_S > 0$

(c) $T_X\, T_Y - T_{XY}^2 > 0$.

Dies folgt aus

$$(T_X - T_S)\,(T_Y - T_S) - (T_{XY} - T_S)^2 \geq 0$$

oder

$$T_X\, T_Y - T_{XY}^2 \geq T_S\,(T_X - 2\,T_{XY} + T_Y) > 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierin dann und nur dann, wenn die Punkte X, Y, S kollinear sind.

Mit (10) erhält man

$$T_Z = \lambda\, T_X + \mu\, T_Y - 2\lambda\mu\nu\pi d^2. \tag{16}$$

Zu dieser Formel gelangt man auch durch direkte Integration der elementar herzuleitenden Beziehung

$$c^2 = \lambda\, a^2 + \mu\, b^2 - \lambda\mu\, d^2,$$

in der a, b, c die Abstände der kollinearen Punkte X, Y, Z von einem beliebigen Punkt Q der Ebene sind, wobei Q auch auf der Geraden XY liegen kann: $a = \overline{QX}$, $b = \overline{QY}$, $c = \overline{QZ}$. (Für (16) haben wir nur $Q = 0'$ zu wählen.)

Die entsprechende Flächenformel lautet

$$F_Z = \lambda\, F_X + \mu\, F_Y - \lambda\mu\nu\pi d^2. \tag{17}$$

Mit diesen Formeln können wir sofort den Satz von *Holditch* [3], [4] herleiten und auf unsere polaren Trägheitsmomente übertragen:

Wir wählen für den Augenblick das Koordinatensystem in $\underline{E}$ so, daß die Punkte X, Y, Z auf die reelle Achse zu liegen kommen. Dann ist $d = y - x$ und

$$a := y - z = \lambda d, \quad b := z - x = \mu d, \quad a + b = d.$$

Damit nehmen unsere Formeln (16), (17) die Gestalt an:

$$T_Z = \frac{1}{d}(a\, T_X + b\, T_Y) - 2\, a\, b\pi\nu, \tag{18}$$

$$F_Z = \frac{1}{d}(a\, F_X + b\, T_Y) - a\, b\pi\nu. \tag{19}$$

Denken wir uns, wie beim klassischen Satz von *Holditch,* den geschlossenen Bewegungsvorgang $\underline{B}$ mit $\nu = 1$ dadurch erzeugt, daß die Endpunkte X, Y einer Strecke konstanter Länge d auf einer Eilinie einmal herumgeführt werden, dann ist $T_X = T_Y$ bzw. $F_X = F_Y$ und gilt

$$T_X - T_Z = 2\, a\, b\pi, \quad F_X - F_Z = a\, b\pi, \tag{20}$$

wobei die zweite Formel (20) den Inhalt des ringförmigen Gebietes zwischen der Eilinie und der Bahnkurve des Punktes Z mißt und von *A. Holditch* stammt. [4]

Nun bleibt noch der Fall $\nu = 0$ zu behandeln. Wir finden

$$T_X = T_0 - (x\,\bar{P} + \bar{x}\, P),$$

$$T_{XY} = T_0 - \frac{1}{2}\left[(x + y)\,\bar{P} + (\bar{x} + \bar{y})\, P\right]$$

mit den zu einer komplexen Zahl zusammengefaßten statischen Momenten

$$P = \oint u\, d\varphi = \oint p\, d\varphi$$

der Gangpolbahn hinsichtlich der Koordinatenachsen in $\underline{E}$. Es gilt

$$T_X - 2\,T_{XY} + T_Y = 0,$$

also $$T_{XY} = \frac{1}{2}\,(T_X + T_Y),$$

sowie $$4\,(T_{XY}^2 - T_X\,T_Y) = (T_X - T_Y)^2 > 0$$

für $T_X \neq T_Y$. Der Vergleich mit den entsprechenden Formeln

$$F_X = F_0 - \frac{1}{2}\,(x\,\overline{P} + \overline{x}\,P),\ \ F_{XY} = F_0 - \frac{1}{4}\left[(x+y)\overline{P} + (\overline{x}+\overline{y})P\right]$$

für die Flächeninhalte zeigt die Gültigkeit der Formeln (9) und (12) auch für $\nu = 0$.

Unsere Ergebnisse und Formeln lassen sich leicht auch auf „offene" Bewegungsvorgänge, also für ein beliebiges Parameterintervall $t \in [t_1, t_2]$ eines durch (1) bestimmten Bewegungsvorgangs übertragen. An die Stelle der von geschlossenen Bahnkurven berandeten Bahnflächen treten die von einer Strecke $Q'X$ in $\underline{E}'$ überstrichenen oder „ausgefegten" Flächenstücke, wobei wir uns die einzelnen Lagen des in $\underline{E}$ festen Punktes X jeweils mit einem festen Punkt $Q' \in \underline{E}'$ verbunden denken.

Literaturverzeichnis

[1] H. R. Müller, Verallgemeinerung einer Formel von Steiner. Abh. d. Brschw. Wiss. Ges. Bd. XXIX.

[2] J. Steiner, Gesammelte Werke, Berlin 1881/82.

[3] W. Blaschke – H. R. Müller, Ebene Kinematik (Math. Einzelschr. Bd. 5), München 1956.

[4] A. Holditch in „Lady's and gentleman's diary for the year 1858".